

EXERCICE 1 : SYSTÈME THERMOÉLASTIQUE ET TRAVAIL MÉCANIQUE

Un cylindre de longueur l égale à 1 m, muni d'un piston pouvant se déplacer sans frottements et dont la section A vaut $0,1 \text{ m}^2$, contient un gaz parfait à 25°C et sous une pression P_0 égale à la pression environnante P_e de 1 bar. On comprime ce gaz jusqu'à une pression finale P_1 de 100 bar en exerçant sur le système une force mécanique de module F .

1. Calculer, pour une transformation irréversible à température constante (isotherme) réalisée avec une pression extérieure P_{ext} constante et pour laquelle l'état final est un état d'équilibre, la valeur du module de la force F de la force mécanique constante appliquée sur la face externe du piston et celle du travail $W_{P,irr}$ échangé par le système avec l'extérieur.

Solution: Comme l'état final est un état d'équilibre en ce qui concerne la pression, la pression finale du système P_1 doit être égale à la pression extérieure P_{ext} :

$$P_{ext} = P_1 = 100 \text{ bar} = 1 \times 10^7 \text{ Pa} \quad (1)$$

La pression extérieure exercée sur le piston est due à : la pression environnante P_e et à la force mécanique F . Tenant compte la relation entre force F et la pression P_F que cette force exerce sur le piston, on peut écrire :

$$P_{ext} = P_e + P_F = P_e + \frac{F}{A} \quad (2)$$

Cette expression, nous permet d'obtenir le module de la force mécanique F :

$$F = (P_{ext} - P_e)A = (1 \times 10^7 - 1 \times 10^5)0,1 = 9,9 \times 10^5 \text{ N} \quad (3)$$

La variation élémentaire du travail lors de cette transformation irréversible δW_{irr} s'exprime :

$$\delta W_{irr} = -P_{ext} dV \quad (4)$$

Il nous reste intégrer (4) entre l'état initial et final, sachant que P_{ext} reste constant au cours de la transformation.

$$W_{irr} = \int_0^1 \delta W_{irr} = \int_{V_0}^{V_1} -P_{ext} dV = -P_{ext}(V_1 - V_0) \quad (5)$$

Le volume initial V_0 du système est donné par :

$$V_0 = l \times A = 1 \times 0,1 = 0,1 \text{ m}^3 \quad (6)$$

Pour calculer le volume final V_1 , nous pouvons utiliser la loi de Boyle et Mariotte. À température constante $PV = \text{cte}$:

$$P_1 V_1 = P_0 V_0; \quad V_1 = \frac{P_0 V_0}{P_1} \quad (7)$$

En combinant les équations (1), (5) et (7) on obtient :

$$W_{irr} = (P_1 - P_0)V_0 = 9,9 \times 10^5 \text{ J} \quad (8)$$

2. Calculer, pour une transformation isotherme, la valeur du travail W_P , échangé par le système avec l'extérieur.

Solution: Dans le cas d'une transformation réversible, on connaît la pression P du système à tout moment. Elle est égale à la pression extérieure P_{ext} . Elle vérifie également l'équation des gaz parfait. La transformation étant à température constante $PV = cte$.

Le travail W_P au cours de cette transformation réversible est donné par :

$$W_P = \int_{V_0}^{V_1} -P_{ext} dV = \int_{V_0}^{V_1} -P dV = -RnT \int_{V_0}^{V_1} \frac{1}{V} dV = P_0 V_0 \ln \left(\frac{V_0}{V_1} \right) = P_0 V_0 \ln \left(\frac{P_1}{P_0} \right) = 4,6 \times 10^4 \text{ J} \quad (9)$$

Le travail nécessaire pour la transformation réversible est significativement inférieur à celui de la transformation irréversible. On a donc besoin de moins d'énergie pour compresser le gaz dans le cas d'une transformation réversible.

EXERCICE 2 : VARIATION D'ÉNERGIE INTERNE ET TRANSFERT THERMIQUE

On chauffe un récipient contenant 6 g d'hydrogène H_2 (gaz supposée parfait) dont la température s'élève de 15°C à 30°C . Calculer :

1. la variation d'énergie interne du gaz au cours de cet échauffement.

Solution: Les 6 g d'hydrogène H_2 correspondent à une quantité de matière n de :

$$n = \frac{m}{M} = \frac{6}{2} = 3 \text{ mol} \quad (10)$$

L'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température du gaz : $U = f(T)$ (loi de Joule). La variation élémentaire d'énergie interne pour un gaz parfait est donnée par l'expression suivante :

$$dU = nc_v dT \quad (11)$$

La capacité thermique molaire à volume constant c_V pour un gaz parfait diatomique est constante et égale à :

$$c_V = \frac{5}{2}R \quad (12)$$

La variation d'énergie interne, au cours de la transformation, peut être calculée en intégrant de l'expression (11) :

$$\Delta U = \int_{T_0}^{T_1} nc_V dT = nc_V(T_1 - T_0) = 935 \text{ J} \quad (13)$$

2. la quantité de chaleur reçue par le gaz.

Solution: Pour calculer le chaleur Q reçue par le gaz, nous pouvons utiliser le premier principe de la thermodynamique :

$$\Delta U = Q + W \quad (14)$$

$$Q = \Delta U - W \quad (15)$$

Pour obtenir une valeur numérique, on doit connaître la nature de cette transformation (isobare, isochore, etc.) ou le travail au cours de la transformation. Dans le cas d'une transformation isochore $W = 0$ et $Q = 935 \text{ J}$.

Donnée : $M(\text{H}) = 1 \text{ g mol}^{-1}$

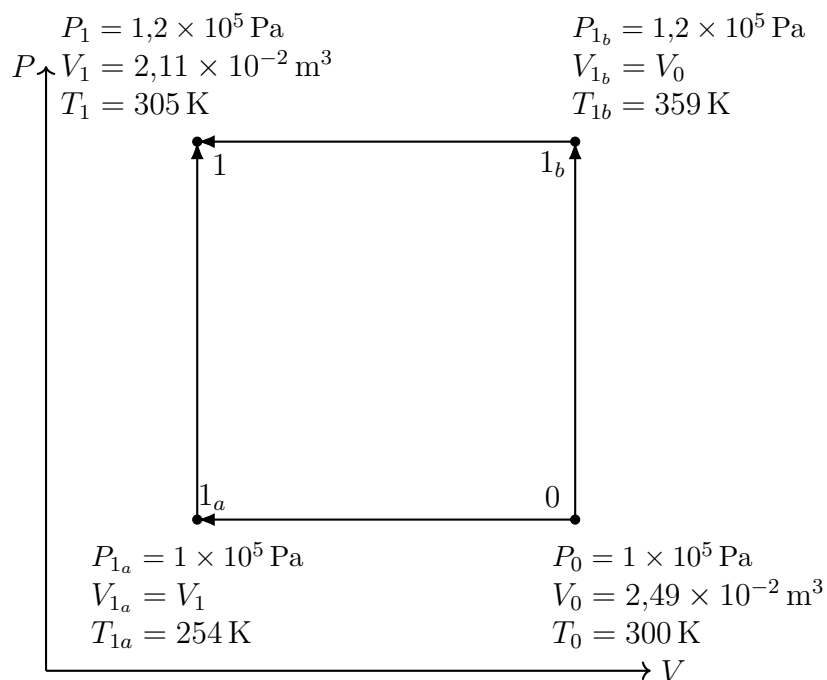
EXERCICE 3 : TRAVAIL ET CHALEUR ÉCHANGÉS PAR UN SYSTÈME

Une mole de gaz parfait monoatomique, initialement à une température T_0 de 300 K et une pression P_0 de 1 bar est amenée réversiblement à la pression de P_1 de 1,2 bar et à la température T_1 de 305 K selon les chemins suivants :

- transformation isobare suivie d'une transformation isochore ;
- transformation isochore suivie d'une transformation isobare.

Calculez pour chaque chemin, les paramètres d'état du gaz au point intermédiaire, puis le travail total et la chaleur échangés par le gaz avec l'extérieur.

Solution: On peut s'aider d'un diagramme PV (diagramme de Clapeyron) et de l'équation d'état des gaz parfaits pour calculer les paramètres d'état dans les étapes intermédiaires :



On commence par calculer les travaux au cours de différentes étapes. Les travaux au cours des transformations isochores sont nuls :

$$W_{0 \rightarrow 1_b} = W_{1_a \rightarrow 1} = 0 \quad (16)$$

Puis, on calcule les travaux au cours des transformations isobares :

$$W_{0 \rightarrow 1_a} = \int_0^{1_a} -P \, dV = -P_0(V_1 - V_0) = 380 \text{ J} \quad (17)$$

$$W_{0 \rightarrow 1_b} = \int_0^1 -P \, dV = -P_1(V_1 - V_0) = 456 \text{ J} \quad (18)$$

Au cours de la transformation A (isobare + isochore) :

$$W_A = W_{0 \rightarrow 1_a} + W_{1_a \rightarrow 1} = 380 \text{ J} \quad (19)$$

Au cours de la transformation B (isochore + isobare) :

$$W_B = W_{0 \rightarrow 1_b} + W_{1_b \rightarrow 1} = 456 \text{ J} \quad (20)$$

Finalement, on peut utiliser le premier principe de la thermodynamique pour calculer la chaleur échangée au cours des deux transformations A et B :

$$\Delta U = Q + W \quad (21)$$

Comme l'énergie interne est une fonction d'état, sa variation ne dépend que de l'état initial et final du système. Elle est indépendante du chemin suivi $\Delta U = \Delta U_A = \Delta U_B$:

$$\Delta U = \int_{T_0}^{T_1} n c_V \, dT = n c_V (T_1 - T_0) \quad (22)$$

Comme notre système est constitué d'un gaz parfait monoatomique : $c_V = 3/2R$

$$\Delta U = n c_V (T_1 - T_2) = 62,4 \text{ J} \quad (23)$$

On peut maintenant calculer, à partir de l'expression (21) les chaleurs Q_A et Q_B échangées au cours des transformations A et B, respectivement :

$$Q_A = \Delta U - W_A = -318 \text{ J} \quad (24)$$

$$Q_B = \Delta U - W_B = -394 \text{ J} \quad (25)$$

EXERCICE 4 : DÉTENTE ISOTHERME D'UN GAZ PARFAIT

1 m^3 d'air (supposé gaz parfait), à la pression $P_0 = 10 \times 10^6 \text{ Pa}$, subit une détente, à température constante. La pression finale est $P_1 = 1 \text{ bar}$

- Déterminer le travail échangé par le gaz avec le milieu extérieur, au cours de cette détente.

Solution: Comme la transformation a lieu à température constante :

$$P_0 V_0 = P_1 V_1 = \text{cte} \quad (26)$$

On calcule le travail échangé au cours de cette transformation :

$$W = \int_0^1 \delta W = \int_{V_0}^{V_1} -P dV = -RnT \int_{V_0}^{V_1} \frac{1}{V} dV = -P_0 V_0 \ln \left(\frac{V_1}{V_0} \right) = P_0 V_0 \ln \left(\frac{P_1}{P_0} \right) = -4,6 \times 10^7 \text{ J} = -4,6 \times 10^4 \text{ kJ} \quad (27)$$

2. Déterminer la quantité de chaleur échangée avec le milieu extérieur.

Solution: Pour calculer la quantité de chaleur échangée, nous pouvons utiliser l'expression du premier principe de la thermodynamique :

$$\Delta U = Q + W \quad (28)$$

Comme cette transformation est isotherme et l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température, la variation de l'énergie interne ΔU sera nulle :

$$\Delta U = 0 \quad (29)$$

$$Q = -W = 4,6 \times 10^7 \text{ J} = 4,6 \times 10^4 \text{ kJ} \quad (30)$$

EXERCICE 5 : ÉTUDE D'UNE TRANSFORMATION ADIABATIQUE RÉVERSIBLE

1. À partir des notions vues en cours (premier principe de la thermodynamique, loi de Joule, l'équation du gaz parfait, la relation de Mayer, expression du travail, etc.) montrer que lors de la transformation adiabatique d'un gaz parfait se vérifie la relation suivante :

$$PV^\gamma = \text{constante}$$

où $\gamma = c_P/c_V$

Solution: Dans le cas d'une transformation adiabatique d'un gaz parfait on peut écrire les relations suivantes :

$$1^{\text{re}} \text{ principe : } dU = \delta Q + \delta W \quad (31)$$

$$\text{Transformation adiabatique : } \delta Q = 0 \quad (32)$$

$$\text{Équation d'état des gaz parfaits : } PV = RnT \quad (33)$$

$$\text{Relation de Mayer : } c_P - c_V = R \quad (34)$$

$$\text{Loi de Joule : } U = f(T); dU = nc_V dT \quad (35)$$

$$\text{Variation élémentaire du travail : } \delta W = -P dV = -RnT \frac{dV}{V} \quad (36)$$

Comme la transformation est adiabatique :

$$\begin{aligned}
 dU &= \delta W \\
 nc_V dT &= -RnT \frac{dV}{V} \\
 c_V \frac{dT}{T} + (c_P - c_V) \frac{dV}{V} &= 0
 \end{aligned} \tag{37}$$

À partir de l'équation des gaz parfaits :

$$\begin{aligned}
 PV &= RnT \\
 \ln(PV) &= \ln(RnT) \\
 \ln(P) + \ln(V) &= \ln(Rn) + \ln(T) \\
 \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} &= \frac{dT}{T}
 \end{aligned} \tag{38}$$

En reportant (38) dans la relation (37) on obtient :

$$\begin{aligned}
 \frac{dP}{P} + \frac{c_P}{c_V} \frac{dV}{V} &= 0 \\
 \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} &= 0
 \end{aligned} \tag{39}$$

Comme les capacités thermiques molaires c_V et c_P sont constantes, leur rapport γ l'est aussi.

L'intégration de l'équation (39) donne :

$$PV^\gamma = \text{constante} \tag{40}$$

2. Un récipient fermé par un piston mobile, renferme 2g d'hélium (gaz parfait monoatomique) dans les conditions (P_0, V_0) . On opère une compression adiabatique, de façon réversible, qui amène le gaz dans les conditions (P_1, V_1) . On donne $P_0 = 1$ bar, $V_0 = 20$ L, $P_1 = 3$ bar Déterminer :

- (a) le volume final V_1 ;

Solution: La quantité de matière correspondante à 2g de He est :

$$n = \frac{2}{4} = 0,5 \text{ mol} \tag{41}$$

Pour un gaz parfait monoatomique :

$$c_v = \frac{3}{2}R; \quad c_p = \frac{5}{2}R; \quad \gamma = \frac{5}{3} \tag{42}$$

Comme la transformation est adiabatique :

$$P_0 V_0^\gamma = P_1 V_1^\gamma$$

$$V_1 = \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} V_0 = 0,517 V_0 = 10,3 \text{ L} = 1,03 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \quad (43)$$

(b) le travail reçu par le gaz ;

Solution: La transformation étant adiabatique, on peut écrire :

$$P = AV^{-\gamma} \quad (44)$$

A étant une constante.

$$W = \int_{V_0}^{V_1} -P dV = A \int_{V_0}^{V_1} -V^{-\gamma} dV = \left[\frac{AV^{1-\gamma}}{\gamma-1} \right]_{V_0}^{V_1} = \left[\frac{PV}{\gamma-1} \right]_0^1$$

$$W = \frac{P_1 V_1 - P_0 V_0}{\gamma-1} = 1635 \text{ J} \quad (45)$$

(c) la variation d'énergie interne ;

Solution:

$$\Delta U = W = \frac{P_1 V_1 - P_0 V_0}{\gamma-1} = 1635 \text{ J} \quad (46)$$

(d) la variation de la température.

Solution:

$$\Delta U = W = nc_V \Delta T \quad (47)$$

$$\Delta T = \frac{W}{nc_V} = 262 \text{ K} \quad (48)$$

Données : $M(\text{He}) = 4 \text{ g mol}^{-1}$